Pablo Amster

FRAGMENTOS DE UN DISCURSO MATEMÁTICO

Prólogo

> Pero no leer es algo así como un mutismo pasivo; escribir es el verdadero modo de no leer y de vengarse de haber leído tanto.
>
> MACEDONIO FERNÁNDEZ (1966)

En este libro se propone un recorrido por el universo matemático. Pero no se trata de un recorrido cualquiera, sino de uno que incluye las escalas más diversas: desde la literatura y la filosofía hasta el psicoanálisis, las notas musicales, los conejos y los juegos de azar.

Tanta variedad puede tomar por sorpresa al viajero desprevenido, aunque en algún sentido no debe resultar extraña: hace tiempo que se ha descubierto en la matemática esa curiosa propiedad de manifestarse en los lugares más inesperados. En realidad, hasta hace poco se la consideraba apenas la ciencia de las cantidades; por otra parte, durante muchos siglos se ha creído que sus enunciados contenían la más absoluta Verdad. Pero hoy se sabe que nada de esto es cierto, tal como lo expresa la frase del lógico y filósofo inglés Bertrand Russell: "Las matemáticas son una ciencia en la que nunca se sabe de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero".

Ante las palabras de Russell, quizás convenga adoptar directamente una fórmula menos controvertida, la del gran matemático francés Henri Poincaré: "La matemática es el arte de nombrar de la misma manera cosas distintas". Aunque este enunciado no debe tomarse como una definición, resume de un modo sorprendente aquello que constituye el quehacer del matemático. Porque, en el fondo, el descubrimiento o la invención de un teorema no consiste en otra cosa más que en vincular entidades o ideas que antes parecían inconexas. Tal es el espíritu que guiará este texto.

El libro está dividido en distintas secciones, que no deben entenderse como capítulos sino más bien como retazos o *fragmentos* de una trama global. La primera de ellas describe brevemente el sistema que constituye la base de la matemática, hasta tal punto que algunos autores han creído que se trata de cierta clase de legado divino: el conjunto de los números naturales. Luego se introducen, sin mayor orden ni concierto, temas tales como el de los infinitos, el problema del límite y el continuo, las secuencias azarosas, o la sutil conclusión a la que algunos lógicos de estos últimos tiempos han llegado: el mundo es esencialmente incognoscible. Y, ya que hablamos de "concierto", merece también destacarse una breve sección dedicada a la formación de la escala musical, desde la antigua gama griega hasta la bien temperada escala bachiana, construida con la inestimable ayuda de los logaritmos.

Finalmente, debemos mencionar aquel texto que, al margen de toda creencia, posee una inobjetable riqueza: la *Tora* o el *Antiguo Testamento*, compuesto por los cinco libros del Pentateuco. Según la tradición, fue entregado por Dios a su pueblo, reunido al pie del monte Sinaí; una tradición algo menos convencional ha motivado una variedad de conexiones con diversos puntos de este otro texto, el matemático, ciertamente menos sagrado. El proceder, un tanto llamativo, encuentra acaso algún sustento en una conocida afirmación del poeta Novalis, que sugiere que tal vez no se trate de cosas tan diferentes: "La matemática pura es religión".

Conviene hacer también una advertencia sobre este trabajo, plagado de notas y acotaciones que pueden presentar alguna dificultad para aquel lector dispuesto a encarar una lectura lineal. Sin la pretensión de hacer un elogio del desorden, podemos decir que el modo de exposición busca reproducir el pensamiento, algo caótico, que caracteriza a la creación matemática, y permite una lectura "ida y vuelta", con asociaciones entre los distintos temas.

En realidad, este carácter esconde además otra intención secreta, la de *escribir como lector*. Esto lleva a dar cuenta, en ocasiones, de una multiplicidad de interpretaciones simultáneas en torno de una misma frase. El resultado es -si vale el contrasentido- una serie ordenada de digresiones, que el lector podrá decidir si afronta o pasa por alto, de acuerdo a si su ánimo se encuentra más o menos disperso en el momento de toparse con ellas. Tal espíritu no lo hace muy diferente, en definitiva, del texto del Talmud, ese auténtico tratado de interpretación bíblica que se compone de un conjunto abigarrado de páginas, en las que un texto central ("el texto") funciona como hilo conductor, y sus márgenes se encuentran poblados de una vasta gama de párrafos de distintos autores. Aquí el hilo es la matemática; como diría el sabio Hillel, lo demás es comentario.[1]

[1] Cuenta la tradición que un pagano desafió a Hillel a que le enseñara la totalidad de la Biblia durante el tiempo que pudiera sostenerse parado en un solo pie. El sabio lo miró un momento y respondió: "No hagas a los demás lo que no quieres que te hagan a ti. Esa es toda la ley; lo demás es comentario. Ve y apréndelo". A diferencia del

1. Una construcción que se tambalea
(fragmento)

Dios creó los números naturales;
todo lo demás es obra del hombre.

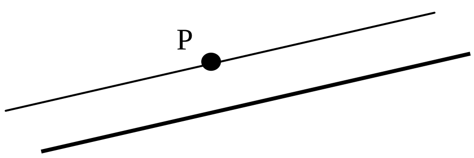
LEOPOLD KRONECKER

Si vamos al teatro y compramos tres entradas, parece poco probable que se nos ocurra pensar en el concepto *tres* como una idea dada por Dios. Tampoco lo hará el boletero. Sin embargo, en la mayoría de los casos nuestro pedido es interpretado con éxito; estamos todos de acuerdo en lo que tal cosa quiere decir: tres.

Experiencias felices de esta clase son las que nos llevan a creer que hay algo verdaderamente natural en el número natural, algo que *no puede* ser de otra manera. Por eso nos resulta justa la frase de Kronecker que se cita en el epígrafe, ya que casi todo lo que conocemos en la matemática se construye (como era de esperarse) sobre estos números. Y estos números satisfacen a nuestra intuición: los creó Dios, y vio que eran buenos.

Pero ya el matemático del siglo XIX no se mostraba muy dispuesto a aceptar las intervenciones divinas en sus definiciones, al menos después de la "crisis de verdad" suscitada por la aparición de las denominadas *geometrías no euclidianas*. Veamos de qué se trata.

Durante siglos, la única y evidente geometría fue la de Euclides, pero eso no basta para suponer que Euclides haya considerado que sus postulados eran buenos -en todo caso, no *absolutamente* buenos-, en especial el quinto, el de las paralelas, que en una versión algo más moderna dice: "Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a dicha recta".



Talmud, en el presente libro los comentaristas se reducen a uno solo: el propio autor. Salvo que alguien pretenda poner en práctica aquella sentencia del poeta Arthur Rimbaud: "Yo es otro". Esta formulación tan notable cobra un nuevo sentido si se piensa en aquel célebre grupo de matemáticos autodenominado Nicolas Bourbaki, que concibió su obra como la labor de una única persona, una postura que podría resumirse diciendo: "Otros son Yo".

He aquí un ejemplo tradicional de una “verdad evidente” que nadie pudo probar. A través de muy diversos intentos, hubo quienes quedaron “angustiados, metafísicamente traumatizados” (AAVV, 1984), y también quienes creyeron haber resuelto el problema. Entre estos últimos, el caso más resonante es el de Saccheri, un religioso que en el siglo XVIII partió de la negación del postulado y por medio de deducciones geométricas obtuvo algo que, según sus palabras, “repugna a la naturaleza de la línea recta”. Concluyó entonces que el postulado tenía que ser verdadero, y publicó a toda prisa un tratado redentor titulado *Euclides vindicado de toda mancha*.

Sin embargo, pocas décadas más tarde aparecieron los primeros trabajos sobre las *geometrías no euclidianas,* que, si bien pueden parecer un tanto lejanas al tipo de ideas a las que llamamos intuitivas, son tan buenas como las de Euclides. En una de ellas, denominada *elíptica*, las paralelas sencillamente no existen, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180º y el teorema de Pitágoras es falso. Extrañezas análogas ocurren en la llamada geometría *hiperbólica*, cuya bondad fue comprobada por matemáticos como Carl Gauss, János Bolyai y Nikolai Lobachevski, a pesar de que también allí Pitágoras mienta, y las rectas sean justamente las mismas que a Saccheri le habían parecido repugnantes. Quizás una de estas geometrías, o alguna otra, describa finalmente el Uni-verso: en tal caso, las otras serán repugnantes a los ojos del físico o del religioso, siempre que se consiga determinar cuál es la verdadera. Para el matemático, no hace falta decirlo, son tan válidas unas como otras.

Digresión 1.1

Esta idea de “validez” corresponde en realidad al concepto lógico de consistencia: un sistema es consistente si sus axiomas no producen contradicciones. Cabe aclarar que se trata de un concepto sintáctico; como tal, no dice nada acerca de la verdad. Lo que se demostró es que si la geometría euclidiana es consistente, entonces también lo son las no euclidianas; pero eso no ayuda a saber cómo es el mundo. Se cuenta que Gauss intentó determinar cuál de las geometrías era “la verdadera” midiendo un enorme triángulo formado por los picos de tres montañas, pero más tarde se comprendió que la actividad de andar por ahí midiendo montañas no era muy provechosa. Pero al menos no perjudica a nadie; distinto es el anhelo casi obsesivo por la verdad que describe Thomas de Quincey (1827) en su libro *Del asesinato como una de las bellas artes*: “Kant llevó los límites de la verdad a un punto tan extravagante que no temió afirmar que, cuando un hombre viese a un inocente escapar de manos de un asesino su deber era, interrogado por el asesino, decir la verdad e indicarle dónde se refugiaría la víctima, aun teniendo la certeza de que sería asesinada”.

Conviene aclarar también que la “falsedad” que hemos achacado al teorema de Pitágoras sólo es pertinente cuando tomamos al pie de la letra su formulación $a^2 + b^2 = c^2$, en donde *a, b* y *c* representan respectivamente las medidas de los dos catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Pero en realidad el enunciado, como muchos otros teoremas clásicos, cobra una nueva forma en las geometrías no euclidianas. Por ejemplo, en la geometría hiperbólica el perímetro de una circunferencia de radio *r* no se calcula según la consabida fórmula πr^2, sino por otra, un tanto más extraña: $\pi k(e^{r/k} - e^{-r/k})$. El valor *k* es una constante que tiene que ver con la curvatura del espacio, y el número *e* es la famosa base natural de los logaritmos.

Pero al margen de las cuestiones filosóficas, cuando llega el momento de tomar las medidas de una pared para colocar estantes no solemos pensar en Lobachevski: para casi todas nuestras necesidades prácticas, la geometría de Euclides es suficiente. En la aritmética, la situación es similar: los números naturales que conocemos siempre han funcionado bien; en cierto sentido, casi kantiano también, podría decirse que obedecen a una suerte de corazonada. Pero eso no nos autoriza a confiar en ellos de manera absoluta; para convencernos de esto, basta mencionar a aquel rencoroso corazón delator del cuento de Edgar Allan Poe.[2]

A partir de los trabajos dados a conocer por el italiano Giuseppe Peano en 1889 vemos que, en todo caso, no es necesario pedir a Dios el enorme trabajo de crear *todos* los números. Es suficiente con uno solo: el cero; los restantes se obtienen a partir de la noción de “sucesor”. Más aun, casi todos los atributos de los números se resumen con ayuda de una idea ciertamente sagaz, la de *propiedad inductiva*: se dice que una propiedad es inductiva si cada vez que se cumple para un número, se cumple también para su sucesor. El sistema de Peano cuenta con tres ideas primitivas (*cero*, *número* y *sucesor*) y cinco axiomas o postulados básicos:

1. El cero es un número.
2. Si *n* es un número, el sucesor de *n* también lo es.
3. A números distintos corresponden distintos sucesores.
4. El cero no es sucesor de ningún número.
5. *Principio de inducción*: si una propiedad inductiva se cumple para el cero, entonces se cumple para todos los números.

Con este sobrio material es posible (re)construir la aritmética y ofrecer un fecundo panorama de números definidos uno por uno: a partir del cero, cuya existencia es garantizada por el primer postulado,

[2] Véase “El corazón delator” (Poe, 1843), un cuento cuyo final no vamos precisamente a delatar.

obtenemos, gracias al postulado 2, un *nuevo* número, al que podemos consentir en llamar “1”. A su vez, el 1 tiene un sucesor (“2”), y con este mecanismo se genera la sucesión

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

con lo cual todo parece suceder muy bien.

Digresión 1.2

Observemos que las cursivas del texto remarcan que el 1 es un “nuevo” número; en principio, eso significa que es distinto de 0, lo que se comprueba en forma inmediata a partir del axioma 4. En realidad, para que el conjunto de números generados resulte una sucesión “como Dios manda”, debe verificarse que cada número difiera de todos los anteriores; eso se logra haciendo un uso apropiado del axioma 5.

Pero notemos también que la operación de (re)construcción exige cierto espíritu de simulación, pues debemos fingir que a este 1 y sus sucesores no los hemos visto antes en otra parte. Una ficción un tanto ingenua, comparable a la que propone Ramón Gómez de la Serna en una de sus greguerías: “Hay días en que la luna se disfraza de nube suelta en el cielo de la mañana y cree que no la conocemos”.

La greguería es un “pensamiento disparatado”, una creación del autor madrileño que se convirtió en su auténtica especialidad. He aquí otro ejemplo: “Cuando suena la radio a ajos fritos, ojo a la sartén”.

La palabra *greguería* proviene de “griego”, lo que nos da a entender que el modo de vida de los griegos contenía, según ciertas opiniones, una buena dosis de algarabía.

Pero es fácil burlarse de las corazonadas. Por ejemplo, si consideramos como cero al número 25, y como sucesor de n al número $n + 7$, el sistema funciona, aunque ahora el “universo” será esta otra sucesión, un tanto más rala:

$$25, 32, 39, 46, \ldots$$

Si definimos la suma de un modo adecuado a este mundo tan peculiar, obtenemos resultados como el siguiente:

$$32 + 39 = 46$$

Estos resultados -podría pensarse- repugnan a la naturaleza del número. Pero no porque se trate de una suma menos válida que la usual; en definitiva, es apenas un cambio de nomenclatura. Eso sí, al que decidiera adoptarlo se le harían francamente más complicadas ciertas acciones tan cotidianas como pedir entradas para el teatro: "Deme 46: para mí, mi esposa y mis 32 hijos".

Motivado quizá por sus discusiones en las boleterías, el lógico alemán Gottlob Frege (1985) intentó, hacia 1884, "hacer plausible la idea de que la aritmética es una rama de la lógica y que no necesita ser fundamentada ni en la experiencia ni en la intuición". Así, nuestra idea (ni intuitiva ni experta) de número natural será "natural" siempre que lo sea la buena Lógica. Sin embargo, un hecho bastante conocido habría de fastidiar los planes de Frege, quien más tarde reconoció, con cierta melancolía: "Nada más triste puede suceder a un escritor científico que ver cómo, después de terminado su trabajo, una de las bases de su construcción se tambalea".

"Se tambalea" es una manera más bien afable de decirlo, pues ese hecho tan singular terminó por derrumbar definitivamente el edificio de Frege: se trata de la llamada *paradoja de Russell*, responsable de ciertos malestares entre los matemáticos de principios del siglo XX. Se observó, por fin, que el tema no era tan complicado: fue suficiente introducir una axiomática adecuada para que la teoría de conjuntos volviera a merecer una dosis aceptable de confianza; no obstante, la paradoja limitó sus alcances, y mostró que deducir la aritmética a partir de la lógica no es una tarea sencilla. Más que eso, se ha probado que, en cierta medida, dicha tarea es imposible: tal es el golpe de gracia que dio tiempo después un agudo lógico austríaco llamado Kurt Gödel.

Digresión 1.3

Existen diversas versiones de la paradoja de Russell, algunas de carácter más matemático que otras. Podemos mencionar, por ejemplo, aquella cuya presencia tiñe el ambiente de las inquietas bibliotecas de Jorge Luis Borges, y que se refiere, en efecto, a un libro; más precisamente, a un catálogo, cuyo atributo más destacable consiste en que menciona a "todos aquellos libros que no se mencionan a sí mismos". El catálogo ¿se menciona a sí mismo? Suponer que lo hace o suponer que no lo hace lleva igualmente a un absurdo. A pesar de su inofensiva apariencia, este argumento llegó a provocar, al ser reproducido en el terreno de la teoría de conjuntos, una seria crisis en los fundamentos de la matemática. En relación con el "derrumbe" de la construcción de Frege, dijo Russell: "Cuando pienso en actos de gracia e integridad me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorada en beneficio de hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal.

Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerse famosos" [citado en Griffin (2001)].

Sobre la crisis en los fundamentos de la matemática, y también sobre Gödel y sus teoremas, hablaremos más adelante.